粒子群优化算法确定非线性流含水层参数

王 菲 刘元会 郭建青
(长安大学理学院 西安市 710064)

提 要 针对在含水层中存在非线性流情况下，分析非稳定井流试验数据及确定含水层参数的方法较少的问题，该文首先在已有非稳定井流问题解析解的基础上，进行了进一步的推导和简化，得到了能够方便应用的数值表达式; 然后又根据最小二乘原理，构造了用于分析含水层中存在非线性流时的抽水试验数据、确定了含水层参数与非线性渗流参数的目标函数，并编写了用于求解该问题的粒子群优化算法专门程序; 最后，通过数字算例验证了方法的可行性和可靠性。

关键词 非线性井流 解析解简化 抽水试验数据 粒子群算法 含水层系数

Determination on Aquifer Parameters in Nonlinear Flow by Particle Swarm Optimization Algorithms

Wang Fei Liu Yuanhui Guo Jianqing
(College of Mathematical and Physics, Chang´an University)

Abstract According to the issues that the method of analyzing data of pumping tests and determining the aquifer parameters in nonlinear flow conditions have few, first, based on the analytical solution to unsteady flows, through the further formulate and simplify, the numerical calculation expression is obtained. Second, according to the principle of least square, the target function to analyze the data of pumping tests in nonlinear flow and the determinination of aquifer and nonlinear parameters is constructed. Then, the computation procedure of particle swarm optimization algorithm is compiled. At last, through the numerical example it verifies the particle swarm optimization algorithm is reliable and feasible.

Keywords nonlinear flow; simplification of analytical solution; pumping test data; particle swarm optimization algorithm; parameters of aquifer

1 引言

含水层参数是定量表征含水层储水性、导水性的基本物理参数，也是进行地下水资源评价的基础数据。进行非稳定流抽水试验，根据试验过程中观察到的降深时间变化数据，采用适当的解析数学模型进行反演，是确定含水层参数的主要途径之一。目前，采用的解析数学模型多是假定水在含水层中的流动为线性的(达西假设) [1] 。这一假设在大多数情况下是和实际水流状态相符合的; 然而，在含水层厚度较小或者抽水流量较大的情况下，抽水井附近有可能出现非线性流的状态。

近年来，对于这一问题，国内外学者已经进行了一些研究工作，并取得了一定的成果[2] 。在已得到的解析数学模型中，由于考虑了含水层中的非线性流(非层流) ，出现了 4 个表征非线性特征的参数，其模型结构远比传统线性流情况下的复杂，所以在实际中应用的较少。针对这一问题，本文以国内学者常安定等[3] 推导的非线性井流问题解析解为基础，应用近代优化算法中的粒子群算法，采用抽水试验数据中降深时间数据，反演该解析模型中的相关非线性参数和含水层参数。

基金项目: 陕西自然科学基础研究计划项目(2006D25) ，长安大学科技发展基金项目(0305 - 1001) 。
作者简介: 王菲(1986 -) ，女，硕士研究生，主要从事地下水渗流理论研究。
收稿日期: 2012 - 04 - 05

2 粒子群优化算法

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization,PSO)是基于对一些动物群体行为(如鸟类与鱼类在觅食活动中表现出来的社会性行为)的观察而提出的一种智能优化算法,是一种全局优化进化算法。该算法中每个优化问题的潜在解都可以想象成 d 维搜索空间上的一个点,称之为“粒子”。每个粒子的位置表示待优化问题的解,每个粒子还有一个速度矢量决定他们飞翔的方向和速率。在每一次迭代中,粒子通过本身迄今所找到的个体极值及整个种群迄今所找到的全局极值来更新自己,直到搜索到全局最优解,具体计算过程与流程图可见文献[4]。

事实上,国内学者近年来已经应用粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization)就不同的线性流解析模型,分析抽水试验数据,进行了含水层参数的反演[5,6]。本文中借用他们的研究思路和方法,研究粒子群优化算法在含水层中存在非线性流区域情况下,确定含水层参数和非线性特征参数的应用。

3 水头降深公式的化简及目标函数构造

3.1 降深公式的化简

当含水层厚度较小、介质粒径较大或抽水流量过大时,抽水井附近含水层中的水流状态会由线性流转变为非线性流,为了真实、客观、有效地描述地下水非线性渗流规律,本文把整个渗流区域划分为两种流态区域,即线性流区域和非线性流区域[7,8]。其中,常安定等人推导出的两种流态区域条件下井流问题的水头降深公式[3]为:

$$s_{\mathrm{f}} = s_{\mathrm{d}}(r_{\mathrm{c}},t) + s_{\mathrm{f}}(r,t) \tag{1}$$

其中:

$$s_{\mathrm{d}}(r,t) = \frac{Q}{4\pi T}F_1(u_{\mathrm{c}})\exp[u_{\mathrm{c}}(1 - aK)]\int_{\mathrm{ud}}^{+\infty}\frac{\exp(-u)}{u}\mathrm{d}u \tag{2}$$

$$\mathrm{Lerf}(x,\alpha) = \int_0^x x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$F(r,t) = \left|1 + \frac{b}{a}\cdot\left|\frac{aS(n-1)Q^2}{16\pi^2 m^3 t}\right|^{\frac{n-1}{2}}\cdot\mathrm{Lerf}(x,\alpha)\right|^{-\frac{1}{n-1}} \tag{4}$$

$$u_{\mathrm{c}} = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad u_d = \frac{r_{\mathrm{c}}^2 S}{4Tt} \tag{5}$$

$$s'_{\mathrm{f}}(r,t) = \frac{aQ}{2\pi m}\int_r^{r_{\mathrm{c}}}F_1(r,t)\frac{\exp\left|-\frac{aSr^2}{4mt}\right|}{r}\mathrm{d}r + b\cdot\left|\frac{Q}{2\pi m}\right|^n\cdot\int_r^{r_{\mathrm{c}}}F_1^n(r,t)\cdot\frac{\exp\left|-\frac{naSr^2}{4mt}\right|}{r^n}\mathrm{d}r \tag{6}$$

式中,s_{d} 指在线性流区域内($r > r_{\mathrm{c}}$),由于线性流引起的水头降深,L;s'_{f} 指在非线性区域内($0 < r < r_{\mathrm{c}}$),由于非线性流而产生的水头降深,L;r 为观测井到抽水主井的距离,L;S 为含水层的释水系数;T 为含水层的导水系数,$\mathrm{L^2T^{-1}}$;K 为渗透系数,$\mathrm{LT^{-1}}$;Q 为抽水流量,$\mathrm{L^3T^{-1}}$;m 为含水层厚度,L;t 为抽水时间,T;r_{c} 为临界半径,L;a,b 为非线性渗流定理中的系数;n 为非线性指数。其中 T、S 为含水层参数,r_{c},a,b,n 为非线性特征数。

由于式(1)中的积分都不能用初等函数表示,直接进行积分值计算比较困难。为了实际应用,就需要将其中的积分表达式进行适当的推导和化简,以便对积分进行数值计算。为此,这里应用 6 节点的高斯-勒让德求积公式[9]及泰斯井函数[10]的数值积分公式,对上述积分进行了适当变形、推导和化简。经过整理得到如下的非线性区域降深表达式:

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{f}} = {} & \frac{Q}{4\pi T}\left|1 + \frac{1}{8}b(k_0|f_8|)^{-f_2}S(n-1)\frac{r_{\mathrm{c}}^2}{mt}F_1\right|^{-\frac{1}{n-1}}e^{\frac{f_3}{4}(1-aK)}(-\ln(f_3/4) - h_1 + h_2 f_3 - h_3 f_4 + h_4 f_5 - h_5 f_6 + h_6 f_7) + {} \\
& \frac{aQ}{4\pi m}(r_{\mathrm{c}} - r)(k_1|g_{10}G_1|^{-\frac{1}{n-1}}e^{g18}/l_1 + k_1|g_{20}G_2|^{-\frac{1}{n-1}}e^{g28}/l_2 + k_2|g_{30}G_3|^{-\frac{1}{n-1}}e^{g38}/l_3 + k_2|g_{40}G_4|^{-\frac{1}{n-1}}e^{g48}/l_4 + {} \\
& k_3|g_{50}G_5|^{-\frac{1}{n-1}}e^{g58}/l_5 + k_3|g_{60}G_6|^{-\frac{1}{n-1}}e^{g68}/l_6 + \frac{b}{2}(\frac{1}{2\pi}\left|\frac{Q}{m}\right|)^n(r_{\mathrm{c}} - r)(k_1(|g_{10}G_1|^{-\frac{1}{n-1}})^n e^{ng18}/(l_1)^n + {} \\
& k_1(|g_{20}G_2|^{-\frac{1}{n-1}})^n e^{ng28}/(l_2)^n + k_2(|g_{30}G_3|^{-\frac{1}{n-1}})^n e^{ng38}/(l_3)^n + k_2(|g_{40}G_4|^{-\frac{1}{n-1}})^n e^{ng48}/(l_4)^n + {} \\
& k_3(|g_{50}G_5|^{-\frac{1}{n-1}})^n e^{ng58}/(l_5)^n + k_3(|g_{60}G_6|^{-\frac{1}{n-1}})^n e^{ng68}/(l_6)^n)
\end{aligned} \tag{7}$$

其中:

$$F_1 = k_j\sum_{i=2j+2}^{2j+3}(f_{1i})^{f_2}e^{-f_{1i}} \qquad j = 1,2,3 \tag{8}$$

$$G_p = k_j\sum_{i=2j}^{2j+1}(g_{pi})^{f_2}e^{-g_{pi}} \qquad j = 1,2,3 \qquad p = 1,2,\cdots,6 \tag{9}$$

$$g_{ij}=w_j \cdot g_i \qquad i=1,2,\cdots,6 \qquad j=0,2,3,4,5,6,7,8 \tag{10}$$

$$f_{1j}=k_j \cdot f_1 \qquad j=4,5,6,7,8,9 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&g_1=(d_0r_c/d_3+c_7r/d_3)^2/m/t \quad g_2=(c_7r_c/d_3+d_0r/d_3)^2/m/t\\
&g_3=(c_0r_c/d_3+d_4r/d_3)^2/m/t \quad g_4=(d_4r_c/d_3+c_0r/d_3)^2/m/t\\
&g_5=(d_6r_c/c_6+d_7r/c_6)^2/m/t \quad g_6=(d_7r_c/c_6+d_6r/c_6)^2/m/t\\
&l_1=d_0r_c/d_3+c_7r/d_3 \quad l_2=c_7r_c/d_3+d_0r/d_3 \quad l_3=c_0r_c/d_3+d_4r/d_3\\
&l_4=d_4r_c/d_3+c_0r/d_3 \quad l_5=d_6r_c/c_6+d_7r/c_6 \quad l_6=d_7r_c/c_6+d_6r/c_6
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&k_1=c_3/c_4 \quad k_2=c_9/d_1 \quad k_3=d_5/d_3 \quad k_4=c_5/c_6 \quad k_5=c_7/c_8\\
&k_6=d_2/d_3 \quad k_7=d_4/c_8 \quad k_8=d_6/c_4 \quad k_9=d_7/c_4 \quad k_0=c_1/c_2\\
&h_1=d_8/d_9 \quad h_2=e_1/d_3 \quad h_3=e_2/e_3 \quad h_4=e_4/e_5 \quad h_5=e_6/e_7 \quad h_6=e_8/e_9
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&f_1=aS(n-1)r_c^2/m/t \quad f_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n \quad f_3=r_c^2S/T/t \quad f_4=r_4^2S^2/T^2/t^2\\
&f_5=r_c^6S^3/T^3/t^3 \quad f_6=r_c^8S^4/T^4/t^4 \quad f_7=r_c^{10}S^5/T^5/t^5 \quad f_8=as(n-1)Q^2/m^3/t \quad f_9=aS(n-1)\\
&w_0=1+\frac{1}{8}b\left(\frac{e_0}{c_4}|f_8|\right)^{-f_2} \quad S(n-1) \quad w_2=k_4f_9 \quad w_3=k_5f_9\\
&w_4=k_6f_9 \quad w_5=k_7f_9 \quad w_6=k_8f_9 \quad w_7=k_0f_9 \quad w_8=-aS/4
\end{aligned} \tag{14}$$

$c_0=14962843948051541$　　$d_0=17406137968111927$　　$e_0=228155022448185$
$c_1=17592186044416$　　$d_1=2251799813685248$　　$e_1=4503563283321503$
$c_2=2778046668940015$　　$d_2=3740710987012885$　　$e_2=4501988239423823$
$c_3=6172615361056635$　　$d_3=18014398509481984$　　$e_3=288230376151711744$
$c_4=36028797018963968$　　$d_4=3051554561430443$　　$e_4=1988778066231765$
$c_5=2175767246013991$　　$d_5=8429188086024091$　　$e_5=2305843009213693952$
$c_6=9007199254740992$　　$d_6=5578244904973907$　　$e_6=5626280000911505$
$c_7=608260541370057$　　$d_7=3428954349767085$　　$e_7=147573952589676412928$
$c_8=72057594037927936$　　$d_8=2599548231288415$　　$e_8=1243506547223807$
$c_9=812362842866197$　　$d_9=4503599627370496$　　$e_9=1180591620717411303424$

3.2　目标函数的构造

在应用粒子群优化算法时，要求欲估计的参数值能使目标函数

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_i^{\text{obs}}-s_i^{\text{comp}})^2 \tag{15}$$

达到最小，式中，S_i^{obs} 为在抽水开始后第 i 时刻观测到的实际水位降深值；s_i^{comp} 为利用(7)式计算的第 i 时刻的水位降深值；θ 为待估计的参数向量，这里指 T,S,a,b,n,r_c；$i=1,2,\cdots N$ 为抽水试验过程中水位降深观测时间序列号。上式的意义在于选取适当的参数 θ，使得降深观测值与理论值间误差平方和的均值达到最小，此时对应的参数值即为所求参数的最优解。

对于这一函数优化问题，本文利用 Matlab 编写了专门的粒子群优化算法求解程序。以下通过算例给出利用这一程序的运算结果，并进一步验证简化式的准确性和粒子群优化算法的可靠性。

4　算例

假设含水层的释水系数 $S=6.81\times10^{-2}$，导水系数 $T=4.1\times10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$，观测井到主井的距离 $r=2.5\text{m}$，含水层厚度 $m=3.2\text{m}$，$a=1.3\text{min/m}$，$b=1117(\text{min/m})^2$，$n=1.8$，临界半径 $r_c=3.8\text{m}$。表 1 中给出的是在上述参数情况下，以定流量 $Q=7.41\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$ 抽水，在不同时刻计算的水位降深：

表 1　不同时刻 t 的降深 s

时间/min	降深/m	时间/min	降深/m	时间/min	降深/m
25	0.0522	60	0.0859	95	0.1155
30	0.0531	65	0.0906	100	0.1192
35	0.0587	70	0.0952	105	0.1228
40	0.0646	75	0.0995	110	0.1263
45	0.0703	80	0.1038	115	0.1296
50	0.0757	85	0.1078	120	0.1329
55	0.0809	90	0.1117		

（下转第 38 页）

极限高度显然是偏低的，而利用现场原位测试静力触探、十字板测试指标计算要高。所以稳定计算中采用直剪资料其结果可能会过于安全，用原位测试结果可能更加接近实际。

表 5 用不同测试资料计算极限填土高度

测试方法	室内快剪	三轴	静力触探	现场十字板	现场附近料场堆载堆放最低值
极限填土高度/m	1.80	2.83	4.00	6.00	3.00

4.5 估算单桩承载力

负摩阻力实质上等同于土的抗剪强度，魏汝龙建议软土负摩阻力取不排水抗剪强度 C_u。

美国石油协会(1980)(API - RP2A)建议桩侧极限摩阻力 P_f 按下式取值:

$$P_f = aC_u$$

式中，a 为折减系数。

当 $C_u \leqslant 25\ \text{kPa}, a = 1.0$

$C_u \geqslant 75\ \text{kPa}, a = 0.5$

$25\ \text{kPa} < C_u < 75\ \text{kPa}$，$a$ 在 $0.5 \sim 1.0$ 间内插。

由此估算四新地区(2-1)淤泥极限摩阻力 P_f 约 12 kPa，(2-3)淤泥质粘土极限摩阻力 P_f 约 24 kPa，与武汉地区经验值比较吻合。

十字板剪切试验还可用于检验地基处理效果等，不再赘述。

5 结论

十字板剪切试验是一种现场原位测试手段，特别适用于测定软土抗剪强度和残余抗剪强度，可提供承载力、判断软土固结程度、软土灵敏度，计算路基稳定性等。该方法经验较多，理论较完善，数据可靠，可在软土地基勘察中应推广使用，并积累当地经验，以提供准确的地质参数，提高勘察质量。

参考文献

[1] 孙更生，郑大同. 软土地基与地下工程. 北京: 中国建筑工业出版社，1987

[2] 廖红建，赵树德，等. 岩土工程测试. 北京: 机械工业出版社，2007

[3] 魏汝龙. 软粘土的强度和变形. 北京: 人民交通出版社，1987

(上接第 7 页)

利用本文编写的粒子群算法程序成功地求解了含有 2 个含水层参数和 4 个非线性特征参数的函数优化问题，计算结果见表 2。

表 2 使用 PSO 反求水文地质参数的结果

	T /($m^2 \cdot s^{-1}$)	S	a /($min \cdot m^{-1}$)	b /($min^{-2} \cdot m^2$)	n	r_c /m
精确解	0.0041	0.0681	1.3	1117	1.8	3.8
优化解	0.0041	0.0650	1.23	1113	1.8419	3.8267
相对误差	0%	4.52%	5.38%	0.36%	2.33%	0.7%

5 结束语

在已有非稳定井流问题解析解的基础上，经过推导和简化，得到了能够方便应用的非线性渗流区域上降深的数值表达式，并应用粒子群优化算法，针对抽水试验数据，确定了含水层参数与非线性特征参数。但在多次试验结果中 6 个参数很难同时达到最优，但整体优化解和精确解还比较接近。在以后的研究中，有待进一步的研究试验，以便得出各个参数间变化的规律，制定更科学的优化目标函数，为地下水资源的分析和评价及非线性模型中参数的反演提供更好更可靠的方法。

参考文献

[1] Sen Z. Type curve for two-regime well flow. J. Hydro. Engrg. . 1988，114(12)：1461～1484

[2] 薛禹群，朱学愚. 地下水动力学原理. 北京: 地质出版社，1986: 136～140

[3] 常安定，郭建青，王洪胜. 两种流态区域条件下的井流问题的解析解. 水利学报，2000(6)：49～53

[4] 范娜，云庆夏. 粒子群优化算法及其应用. 信息技术，2006(1)：53～56

[5] 张全兴，常安定. 用粒子群算法反求隔离井公式中的水文地质参数. 西北农林科技大学学报(自然科学版)，2009(2)：219～212

[6] 张鹄志，郭建青. 粒子群优化算法在确定越流含水层参数中的应用. 水利水电科技进展，2011(6)：13～16

[7] 刘元会，常安定，邓秋霞. 线性非线性流并存区域井流问题的水头降深研究. 西北农林科技大学学报，自然科学版，2005(3)：113～115

[8] Sen Z. Non-linear flow toward wells. J. Hydro. Engrg. . ASCE, 1989，115(2)：193～209

[9] 封建湖，车刚明，聂玉峰. 数值分析原理. 北京: 科学出版社，2001

[10] R Srivastava. Implications of using approximation expressions for well function. Journal of Irrigation and Drainage Engineering，1995，121(6)，459～462