

## 曼宁公式分形细化初步研究

钟亮,许光祥

(重庆交通大学 水利水运工程教育部重点实验室 重庆 400074)

摘要: 曼宁公式在河道阻力计算中应用广泛,为涉水工程阻力研究奠定了理论基础,但因其来源于工程经验,公式自身尚存量纲不和谐及影响因素不明确的缺陷,对曼宁公式的上述缺陷进行了尝试性改进,初步建立了量纲和谐且经分形细化的曼宁公式。

关键词: 曼宁公式; 分形细化; 初步研究

中图分类号: TV143

文献标识码: A

文章编号: 0468-155X(2013)01-0034-05

## 1 前言

从18世纪开始,西方的水力学家和工程师们通过大量的实验和实测资料,积极探索了明渠水流的运动规律,提出了曼宁公式,即 $U = R^{2/3} J^{1/2} / n$  (公制)。由于曼宁公式中的糙率 $n$ 反映了综合阻力特性,且形式简单,计算方便,两百多年来该式一直被水力学、河流动力学等理论与实际工程沿用至今,为涉水工程阻力计算奠定了理论基础。但因曼宁公式毕竟来源于工程经验,公式自身还是存在两大缺陷,一是量纲不和谐,糙率 $n$ 还包含因次 $L^{-1/3} T$ ,其结构便缺乏严密性;二是未能体现河道深泓平面蜿蜒曲折与横向断面凹凸不平对过流能力的影响,在一定的水力坡度 $J$ 和糙率 $n$ 的情况下,流速 $U$ 仅与水力半径 $R$ 有关,也就是说,当 $R$ 确定后,不论河道深泓平面形态如何,也无论过水断面是圆形、矩形、三角形或其它任意不规则形状,其 $U$ 均应相同,这与实际情况会有一定差异,影响到公式的计算精度。因此,如能通过引入适当的参数对其进行修正,使其量纲和谐,影响因素明晰,则曼宁公式将会更趋完善,本文将对此作些尝试性研究。

## 2 量纲和谐的曼宁公式

1769年,Chezy<sup>[1]</sup>总结了明渠均匀流的实测资料,提出了计算均匀流的谢才公式,即

$$U = C \sqrt{RJ} \quad (1)$$

式中 $C$ 为谢才系数; $R$ 为水力半径; $J$ 为水力坡度。

随后,许多学者对谢才系数 $C$ 进行了研究,并获得了不少成果,其中Manning<sup>[2]</sup>于1889年发表的经验公式为

$$C = \frac{K_n}{n} R^{1/6} \quad (2)$$

式中 $n$ 为粗糙系数,或简称糙率; $K_n$ 为系数,采用公制单位时 $K_n$ 取1,采用英制单位时 $K_n$ 取1.486。

从而有

收稿日期: 2011-01-19

基金项目: 重庆市科委自然科学基金计划资助项目(cstc2012jjA00020); 重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJ120403)

作者简介: 钟亮(1980-),男,江西赣州人,博士,副教授,主要从事水力学及河流动力学、航道整治技术研究。

E-mail: zlcqjtu@163.com

$$U = \frac{K_n R^{2/3} J^{1/2}}{n} \quad (3)$$

后人逐渐称式(3)为曼宁公式。

将式(3)代入  $\sqrt{f/8} = \sqrt{gRJ}/U$  中,可得无量纲表达式

$$\sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{\sqrt{g}}{K_n} \frac{n}{R^{1/6}} \quad (4)$$

由式(3)可知,  $K_n/n$  具有量纲  $L^{1/3}T^{-1}$ , 显然, 其中的时间量纲  $T$  来源于  $\sqrt{g}$ ; 另一方面,  $g$  与  $J$  是重力的度量, 从式(4)可知,  $\sqrt{g}$  的时间量纲必由  $K_n$  的量纲来平衡。因此,  $K_n$  具有  $\sqrt{g}$  的量纲  $L^{1/2}T^{-1}$ ,  $n$  具有量纲  $L^{1/6}$ , 或者说  $n/R^{1/6}$  是一个无量纲数。从而, 可将式(3)改写为

$$U = \left(\frac{K_n}{\sqrt{g}}\right) \left(\frac{R^{1/6}}{n}\right) \sqrt{gRJ} = \left(\frac{R^{1/6}}{n_g}\right) \sqrt{gRJ} \quad (5)$$

式中  $n_g = n\sqrt{g}/K_n$ , 其量纲为  $L^{1/6}$ 。

根据现有管道及明渠糙率  $n$  的取值情况, 可获得  $n_g$  的取值表, 见表 1<sup>[3]</sup>。

表 1  $n_g$  的取值  
Table 1 Values of  $n_g$

表面状况	$n_g$ 取值						
	最小值		正常值		最大值		
	公制/ $m^{1/6}$	英制/ $ft^{1/6}$	公制/ $m^{1/6}$	英制/ $ft^{1/6}$	公制/ $m^{1/6}$	英制/ $ft^{1/6}$	
管道	塑料	0.025	0.030	0.030	0.037	0.040	0.050
	钢铁	0.030	0.037	0.040	0.050	0.055	0.068
	黏土	0.035	0.043	0.045	0.055	0.055	0.068
	混凝土	0.035	0.043	0.045	0.055	0.060	0.075
	起皱褶的金属	0.040	0.050	0.065	0.080	0.095	0.115
明渠	钢铁	0.030	0.037	0.040	0.050	0.055	0.068
	水泥	0.030	0.037	0.040	0.050	0.050	0.062
	混凝土	0.035	0.043	0.050	0.060	0.075	0.090
	沥青	0.040	0.050	0.045	0.055	0.050	0.062
	砌石	0.050	0.062	0.070	0.085	0.110	0.135
	砂卵石	0.050	0.062	0.075	0.090	0.110	0.135

若令无量纲曼宁粗糙系数  $n_0 = R^{1/6}/n_g$ , 则式(5)可转化为

$$U = n_0 \sqrt{gRJ} \quad (6)$$

式(6)即为量纲和谐的曼宁公式。

显然, 无量纲曼宁粗糙系数  $n_0$  实质上就是断面平均流速  $U$  与摩阻流速  $U_* (= \sqrt{gRJ})$  之比值。图 1 在半对数坐标系中描绘了不同  $n$  值情况下,  $n_0$  随  $R$  的变化规律, 图中  $R$  的单位为  $m$ 。可以看出, 当  $n$  保持不变时,  $n_0$  将随  $R$  呈递增变化, 且其递增变化速度与  $n$  值的大小成反比。

由  $n_0$  的表达式及图 1 可知, 当水力半径  $R$  与重力加速度  $g$  不变时,  $n_0$  仅取决于糙率  $n$ , 而现有粗糙系数取值表所给出的糙率  $n$ , 一般只与边壁的材料组成及平整情况有关, 虽然对不同部位可选用不同的  $n$  值, 但就糙率  $n$  本身而言, 基本都未直观体现河道平面形态及断面形状对过流能力的具体影响, 因而式(6)中的无量纲数  $n_0$  也就可以理解为平面形态及过水断面形状规则的周界粗糙系数。

综上所述, 量纲和谐的曼宁公式(6)并未直观体现河道深泓平面的蜿蜒曲折变化及横向断面的凹

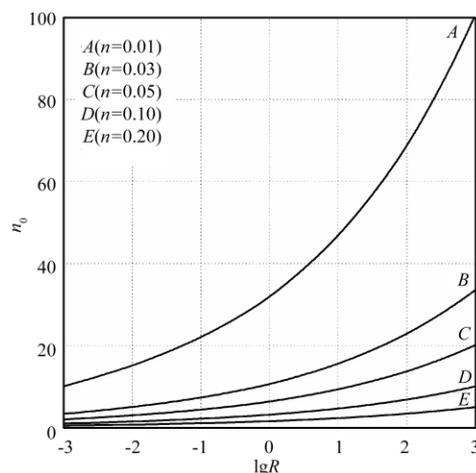


图 1  $n_0$  随  $R$  的变化规律

Fig. 1 Changes of values of  $n_0$  with  $R$

凸不平对过流能力的影响,因此尚需作进一步修正。

### 3 曼宁公式分形细化初步研究

#### 3.1 分形细化的基本构想

“分形(Fractal)”一词是由美国数学家 Mandelbrot 在 1975 年首次提出来的,其原意是“不规则的、分数的、支离破碎的”物体。同年, Mandelbrot 用法文出版了分形几何第一部著作《分形:形状、机遇和维数》,书中第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法,此专著的出版标志着分形理论的正式形成。分形理论主要研究自然界中的自相似不规则对象,而分形维数则是分形理论中用于刻画分形对象的复杂性和不规则性的重要参数。由于天然河道曲折蜿蜒,平面形态复杂破碎,在一定尺度上具有明显的分形特征<sup>[4]</sup>,因而可用分形维数来描述河道平面深泓曲线和断面湿周轮廓的复杂性及不规则性,这更能反映它们的总体特征。因此,本文将考虑在式(6)中引入河道平面深泓曲线的分形维数  $D_p$  及断面湿周轮廓的分形维数  $D_s$ ,来弥补曼宁公式的第二个缺陷。基于这一思路,可将式(6)进一步改写成

$$U = n_1 \sqrt{gRJ} = \frac{kn_0}{D_p D_s} \sqrt{gRJ} \quad (7)$$

式中  $n_1$  表示考虑了河道平面形态及横断面形状对过流能力影响的无量纲曼宁粗糙系数,  $n_1 = kn_0 / (D_p D_s)$ ; 系数  $k$  可由试验资料率定得到; 分形维数  $D_p$  与  $D_s$  可根据计算河段的深泓平面曲线及断面湿周轮廓,采用结构函数法<sup>[5]</sup>获得,取值一般介于 1 和 2 之间,当  $D_p = D_s = 1$  时表示平面形态及过水断面形状规则,有  $n_1 = n_0$ ; 此外,对冲淤变化并不明显的河道来说,其  $D_p$  可看作常数,  $D_s$  仅与水位有关,而对冲淤变化明显的河道,计算  $D_p$  及  $D_s$  时则应充分考虑河床演变的影响。

式(7)即为本文建立的量纲和谐且经分形细化后的曼宁公式,该式反映的关系表明,对于平面形态及横断面形状不同的河道,即便其周界的材料组成与粗糙程度相同(即  $n_0$  相同),它们的过流能力是有一定区别的;这与 Yen 等<sup>[6]</sup>对复式断面水槽过流能力的研究结论是一致的,即对于相同材料制作的不同几何尺寸的复式断面水槽,若采用相同的糙率计算,算出的流量会出现非常大的误差,这种误差主要是由于过流能力与断面形状有关所造成的。

#### 3.2 分形细化的初步实践

前文指出,式(7)中的系数  $k$  可由试验资料确定,由于没有相关的水槽试验资料,本文以河道实测资料为例,对系数  $k$  的取值进行初步讨论。

##### 3.2.1 河道实测资料概况

如图 2 所示,计算选用长江重庆大渡口区的大猫峡河段,距宜昌航道里程约 706 ~ 708km,全长 2km,沿程共布置 5 个分析断面,图中同时绘出了平面深泓线。采用的实测资料为工程河段洪水( $Q = 21\ 600\text{m}^3/\text{s}$ )、中水( $Q = 15\ 000\text{m}^3/\text{s}$ )和枯水( $Q = 7\ 430\text{m}^3/\text{s}$ )水面线及同时期的江床地形图<sup>[7]</sup>。

##### 3.2.2 确定系数 $k$ 的步骤

根据实测的江床地形图及水面线资料,即可确定系数  $k$ ,具体步骤如下:

- (1) 在江床地形图中绘制平面深泓线,并读取用于分析计算的断面数据;
- (2) 根据实测水面线资料,在 CAD 中量取各断面的过水面积  $A$  及湿周  $\chi$ ,计算水力半径  $R$  与水力坡度  $J$ ;
- (3) 在已知流量  $Q$  和过水面积  $A$  的情况下,求得各断面平均流速  $U$ ;
- (4) 按均匀流公式计算各断面的糙率  $n = R^{2/3} J^{1/2} / U$  以及  $n_0 = R^{1/6} / (n \sqrt{g})$ ;
- (5) 采用结构函数法分别计算河道平面深泓曲线分形维数  $D_p$  以及断面湿周轮廓分形维数  $D_s$ ;
- (6) 确定系数  $k$  的取值,其中  $k = UD_p D_s / (n_0 \sqrt{gRJ})$ 。

##### 3.2.3 计算结果

采用上述步骤获得的系数  $k$  值见表 2。将各次计算结果点绘在图 3 中可以发现,对应于洪水期、中水期及枯水期实测资料下的  $k$  值并无明显变化,且都在均值 1.25 上下波动,因此对于计算河段,可取

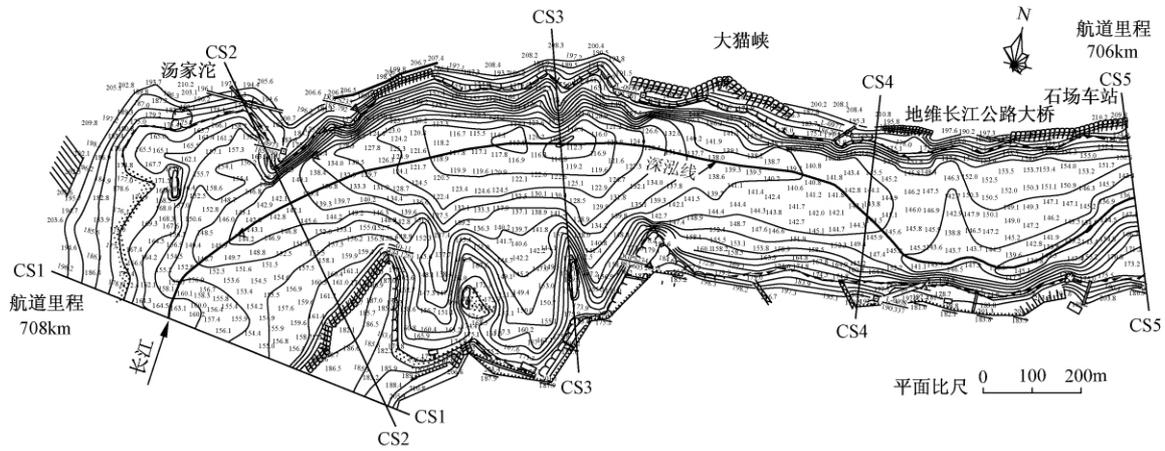


图2 计算河段地形

Fig. 2 Topographic map of study river section

$k = 1.25$ 。

表2  $k$  计算结果  
Table 2 Calculation results of  $k$

$Q / (m^3/s)$	断面	水位/m	$A / m^2$	$\chi / m$	$R / m$	$J / \%$	$U / (m/s)$	$n$	$n_0$	$D_p$	$D_s$	$k$
21 600	CS1	181.817	9 076.90	509.80	17.80	0.118	2.38	0.031	16.584	1.176	1.021	1.20
	CS2	181.780	11 910.86	535.85	22.23	0.118	1.81	0.047	11.311	1.176	1.101	1.30
	CS3	181.715	17 130.30	575.02	29.79	0.118	1.26	0.083	6.794	1.176	1.030	1.20
	CS4	181.640	9 701.90	335.62	28.91	0.118	2.23	0.046	12.177	1.176	1.098	1.30
	CS5	181.580	7 838.74	337.96	23.19	0.118	2.76	0.032	16.825	1.176	1.044	1.23
15 000	CS1	179.940	8 151.63	488.24	16.70	0.064	1.84	0.028	17.982	1.176	1.052	1.23
	CS2	179.920	10 964.73	520.53	21.06	0.064	1.37	0.045	11.902	1.176	1.123	1.32
	CS3	179.885	16 149.73	564.02	28.63	0.064	0.93	0.081	6.931	1.176	1.030	1.20
	CS4	179.845	9 149.08	328.05	27.89	0.064	1.64	0.045	12.396	1.176	1.101	1.30
	CS5	179.813	7 279.28	331.84	21.94	0.064	2.06	0.030	17.568	1.176	1.037	1.22
7 430	CS1	176.580	6 595.75	448.60	14.70	0.017	1.13	0.022	22.761	1.176	1.024	1.20
	CS2	176.575	9 320.61	496.66	18.77	0.017	0.80	0.037	14.257	1.176	1.120	1.32
	CS3	176.565	14 223.09	451.08	31.53	0.017	0.52	0.079	7.208	1.176	1.025	1.20
	CS4	176.554	8 155.91	316.84	25.74	0.017	0.91	0.039	13.911	1.176	1.088	1.28
	CS5	176.545	6 264.61	318.92	19.64	0.017	1.19	0.025	20.732	1.176	1.020	1.20

注: 分形维数  $D_p$  及  $D_s$  采用结构函数法计算

最后, 有以下几点需要特别指出:

(1) 曼宁公式是针对均匀流而言的, 受平面形态及断面形状的不规则性影响, 河道水流条件并非为严格意义上的均匀流, 采用曼宁公式计算非规则河道的过流能力仅是一种近似处理; 在实际应用中, 究竟河道形态(可采用  $D_p$  及  $D_s$  的取值来界定) 怎样时水流就不能当成均匀流, 尚待进一步研究。

(2) 前文针对曼宁公式存在的缺陷进行了分析讨论, 初步获得了量纲和谐且经分形细化后的曼宁公式(7), 同时以长江重庆大猫峡河段的实测资料为例对系数  $k$  的取值进行了初步探讨。式(7)中将  $D_p$  及  $D_s$  作为分母主要是考虑到河道平面形态及断面形状越复杂, 过流能力一般越小, 至于  $D_p$  及  $D_s$  对过流能力的影响是否只是将两者简单地线性叠加? 如果不是, 那  $f(D_p)$  与  $f(D_s)$  的结构形式又如何? 对于不同的河段, 系数  $k$  的取值具有怎样的变化规律? 这些问题都还有待深入讨论。

(3) 对曼宁公式的分形细化研究仅仅是作为一种尝试性探讨, 要想获得理论结构严密且又简单实

用的曼宁公式,目前依然还有一定的难度。

#### 4 结语

曼宁公式是涉水工程阻力计算的常用公式,由于该公式来源于工程经验,公式自身尚存量纲不和谐及影响因素不明确之缺陷,本文针对上述问题进行了分析讨论,建立了量纲和谐且经分形细化的曼宁公式(7)。但需指出,本文旨在对曼宁公式的分形细化方法进行尝试性探讨,式(7)仅是一个初步成果,今后仍有必要进行系统的相关试验,采用大量的实测资料来开展此方面问题的深入研究。

#### 参考文献:

[ 1 ] Rouse H ,Ince S. . History of Hydraulics [M]. Iowa Institute of Hydraulic Research ,Iowa ,1980.

[ 2 ] Manning R. . On the flow of water in open channels and pipes [J]. Trans. ,Institution of Civil Engineers of Ireland ,1889 , 20: 161 - 207.

[ 3 ] Yen B. C. . Dimensionally homogenous Manning's formula [J]. Journal of Hydraulic Engineering , ASCE ,1992 ,118( 9) : 1326 - 1332.

[ 4 ] 王卫红,徐鹏,田世民. 分形理论在河型研究中的应用探讨 [J]. 泥沙研究, 2010( 2) : 35 - 42.

[ 5 ] 葛世荣,朱华. 摩擦学的分形 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.

[ 6 ] Yen B. C. . Overton D. E. . Shape effects on resistance in flood-plain channels [J]. Journal of the Hydraulics Division , ASCE ,1973 ,99( 1) : 219 - 237.

[ 7 ] 童思陈,钟亮. 重钢环保搬迁芭蕉角自备码头改扩建工程防洪评价报告 [R]. 重庆: 重庆三峡水电建筑勘察设计研究院, 2009.

### Preliminary study of fractal refinement of Manning's formula

ZHONG Liang , XU Guang-xiang

( Key Laboratory of Hydraulic and Water Engineeing of the Ministry of Education , Chongqing Jiaotong University , Chongqing 400074 , China)

**Abstract:** Manning's formula has been widely used in the calculation of the river channel resistance , and it establishes the theoretical foundation for water project resistance studies. However , since it is an empirical equation derived from engineering experiences , the formula still has some flaws such as non-uniform dimension issue and uncertain factor problem. This paper attempts to address the above-mentioned flaws , and some preliminary results have been achieved through dimension harmonization and fractal refinement to improve the Manning's formula.

**Key words:** Manning's formula; fractal refinement; preliminary study

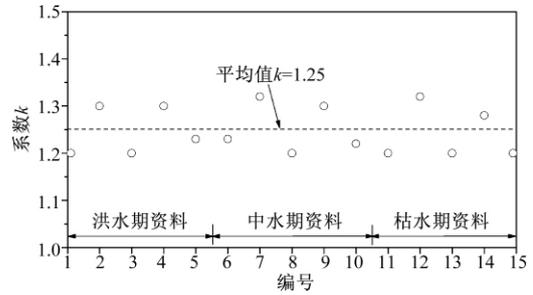


图3 系数k率定

Fig. 3 Determination of coefficient k